MAGAZINE D'EXERCICES
Primitives

EXERCISE N° 1 | 25' | 4.5 point

Un seule réponse est exacte. Laquelle ?

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$ est une primitive sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction :

   a) $x \longmapsto \dfrac{x^2}{\cos(x)}$ b) $x \longmapsto \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{\sin^2(x)}$ c) $x \longmapsto \dfrac{-2x^2}{\cos(x)}$

2. La primitive sur $[0;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ qui s'annule en 0 est :

   a) $x \longmapsto -\dfrac{x}{2(2x+1)}$ b) $x \longmapsto -\dfrac{1}{4x+2} + \dfrac{1}{2}$ c) $x \longmapsto -\dfrac{1}{2(2x+1)^3} + \dfrac{1}{2}$

3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 2$.
   La primitive G de la fonction $g(x) = f(2x)$ qui vérifie $G(0) = 2$ est telle que $G(x) =$

   a) $F(2x) + 1$ b) $\dfrac{1}{2}F(2x) + 1$ c) $\dfrac{1}{2}F(2x)$

4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 2$. La primitive H de la fonction $h(x) = f(x+2)$ qui vérifie $H(0) = 2$ est la fonction :

   a) $x \longmapsto F(x+2)$ b) $x \longmapsto F\left(\dfrac{1}{2}x^2 + x\right)$ c) $x \longmapsto F(x+2) + 2 - F(2)$

5. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto x\sin(x^2+1)$ est :

   a) $x \longmapsto -2\cos\left(x^2+1\right)$ b) $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)$ c) $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\sin\left(x^2+1\right)$

6. La fonction $x \longmapsto x\sqrt{x}$ est la primitive sur $[0;+\infty[$ qui s'annule en 0 de la fonction :

   a) $x \longmapsto \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ b) $x \longmapsto \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ c) $x \longmapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

EXERCISE N° 2 | 10' | 3 point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 5}{(x-1)^2}$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$

2. Déterminer alors la primitive F de f sur $]1;+\infty[$ qui s'annule en 2.

EXERCISE N° 3 | 30' | 5 point

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

1 **a** Par une lecture graphique, montrer que f réalise une bijection de $[0;1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

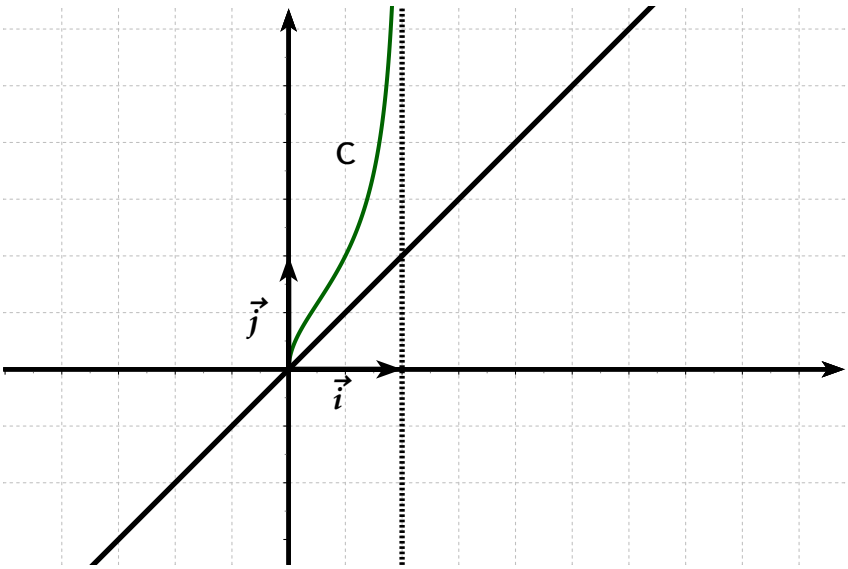
b Déterminer $f^{-1}(1)$

c Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère

d Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

2 Soit F la primitive de f sur $[0;1[$ qui s'annule en 0. On considère la fonction g définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = F\left(\sin^2(x)\right)$.

a Montrer que g est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g(x)$

b En déduire que pour tout $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a : $g(x) = x - \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.

c Calculer alors $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$